Solution 13 :

1°/ $D_f = \mathbf{R}_+$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1}+1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}}{x(x\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}=1$$

d'où f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f'_d(0)=1$.

2°/ $\Delta : y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$ d'où $\Delta : y=x-1$.

3°/ $h(x)=f(x)-y=x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1}-x+1=\dfrac{-1+x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$

$\forall x\geq 0 : h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}\geq 0$ d'où C_f est au dessus de Δ.

4°/a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1})=0$ d'où D : $y=x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

b) $k(x)=f(x)-y=f(x)-x=\dfrac{-1}{x\sqrt{x}+1}<0$ d'où C_f est au dessous de D.

5°/a) $\forall x\geq 0 : f'(x)=1+\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2}>0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$

y = x